

О ПРИМЕНЕНИИ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ПОТЕНЦИАЛА

Горшков А.В.

Введение

Многие задачи, связанные с проблемами безопасности требуют повышенной скорости решения. Математически они приводят к решению задачи потенциала. Поэтому важно повышение скорости и точности решения. Одно из направлений повышения скорости вычислений – уменьшение размерности системы разрешающих уравнений. Использование метода граничных элементов позволяет существенно понизить порядок системы, особенно для трехмерных задач.

Другой путь повышения скорости и точности получения приближенного решения – максимально возможное использование аналитических вычислений.

В данной работе предложен алгоритм решения задачи потенциала, основанный на методе граничных элементов. Входящие в алгоритм интегралы вычислены аналитически. Это позволяет получить точные значения интегралов по элементам и их предельные выражения. Такой подход использовался для решения плоских параболических задач [4] и плоских задач теории упругости [5, 6]. В качестве примера решена задача Дирихле для куба и задача со смешанными краевыми условиями. Приведено сравнение с аналитическим решением. [1, 2]

Построение граничного интегрального уравнения

Рассматривается уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

в области V с поверхностью Γ , где Δ - оператор Лапласа. На поверхности заданы граничные условия

$$\begin{aligned} \text{при } x \in \Gamma_1 \quad u &= \bar{u}(x), \\ \text{при } x \in \Gamma_2 \quad q &= \bar{q}(x), \end{aligned} \tag{2}$$

где $q = \frac{\partial u}{\partial n} = n_j \nabla_j u$, Γ_1 , и Γ_2 - части поверхности, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, x и ξ - трехмерные вектора с компонентами (x_1, x_2, x_3) , чертой отмечены заданные функции.

Для решения используется известный подход взвешенных невязок [2]

$$\int_V \Delta u U^*(\xi, x) dV_x + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) Q^*(\xi, x) d\Gamma_x - \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) U^*(\xi, x) d\Gamma_x = 0. \tag{3}$$

Здесь $U^*(\xi, x)$ - весовая функция, $Q^*(\xi, x) = \partial U^*(\xi, x) / \partial n$. Индекс x в dV_x и $d\Gamma_x$ показывает, что интегралы берутся по переменным x . Преобразуем первое слагаемое в (3), взяв интеграл дважды по частям.

$$\int_V \Delta u U^*(\xi, x) dV_x = \int_V (\nabla_j u U^*(\xi, x))_{,j} dV_x - \int_V \nabla_j u \nabla_j U^*(\xi, x) dV_x.$$

К первому слагаемому правой части применим формулу Гаусса-Остроградского, а интеграл по объему снова проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \nabla_j u(x) n_j U^*(\xi, x) d\Gamma_x - \int_V \nabla_j u(x) \nabla_j U^*(\xi, x) dV_x = \\ & = \int_{\Gamma_x} q(x) U^*(\xi, x) d\Gamma_x - \int_V \left(u(x) \nabla_j U^*(\xi, x) \right)_{,j} dV_x + \int_V u(x) \nabla_j^2 U^*(\xi, x) dV_x . \end{aligned}$$

Применяя ко второму слагаемому формулу Гаусса-Остроградского получим выражение

$$\int_V \Delta u U^*(\xi, x) dV_x = \int_{\Gamma} q(x) U^*(\xi, x) d\Gamma_x - \int_{\Gamma} u(x) Q^*(\xi, x) d\Gamma_x + \int_V u(x) \nabla_j^2 U^*(\xi, x) dV_x .$$

После подстановки в (3) с учетом краевых условий (2) получим

$$\begin{aligned} & \int_V u(x) \nabla_j^2 U^*(\xi, x) dV_x + \int_{\Gamma_1} q(x) U^*(\xi, x) d\Gamma_x + \int_{\Gamma_2} \bar{q}(x) U^*(\xi, x) d\Gamma_x + \\ & - \int_{\Gamma_2} u(x) Q^*(\xi, x) d\Gamma_x - \int_{\Gamma_1} \bar{u}(x) Q^*(\xi, x) d\Gamma_x = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Выберем весовую функцию $U^*(\xi, x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\nabla_j^2 U^* = -\delta(\xi, x),$$

где $\delta(\xi, x)$ - дельта- функция Дирака. Решение этого уравнения имеет вид [2]

$$U^*(\xi, x) = \frac{1}{4\pi r(\xi, x)},$$

где $r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}$.

В результате подстановки в (4) получим граничное интегральное уравнение [2]

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} Q^*(\xi, x) u(x) d\Gamma_x - \int_{\Gamma} U^*(\xi, x) q(x) d\Gamma_x . \tag{5}$$

Здесь интегралы берутся по всей поверхности, включая области, где граничные условия известны и неизвестны.

Вычисление граничных интегралов

Согласно методу граничных элементов, разобьем границу на N элементов. Удобнее использовать треугольные элементы. Для аппроксимации неизвестных функций выберем наиболее простой вариант – будем считать, что потенциал $u(x)$ и поток $q(x)$ на элементе постоянны. Эти значения соответствуют узлу ξ_k элемента k и равны u_k и q_k

соответственно. В качестве узла выберем середину элемента, в данном случае точку пресечения медиан треугольника. Тогда соотношение для определения потенциала (5) в произвольной точке области V примет вид

$$u(\xi) = \sum_{k=1}^N u_k \int_{\Gamma_k} Q^*(\xi, x) d\Gamma_x - \sum_{k=1}^N q_k \int_{\Gamma_k} U^*(\xi, x) d\Gamma_x \quad (6)$$

Через Γ_k обозначен k -тый элемент границы. Запишем соотношения (6) для узлов:

$$u_k = \sum_{m=1}^N u_m \int_{\Gamma_m} Q^*(\xi_k, x) d\Gamma_x - \sum_{m=1}^N q_m \int_{\Gamma_m} U^*(\xi_k, x) d\Gamma_x \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Уравнение (6) свелось к системе линейных уравнений (7). Коэффициенты этой системы представляют собой поверхностные несобственные интегралы

$$U_{mn} = \int_{\Gamma_n} U^*(\xi_m, x) d\Gamma_x, \quad (8)$$

$$Q_{mn} = \int_{\Gamma_n} Q^*(\xi_m, x) d\Gamma_x. \quad (9)$$

Выражения интегралов (8, 9) получены аналитически. Для вычисления интегралов вершины элемента нумеруются так, чтобы обход со стороны внешней нормали поверхности был против часовой стрелки. На каждом элементе вводится локальная система координат $ox_1x_2x_3$. Систему выбираем так, что начало o совпадает с третьей вершиной элемента. Ось ox_3 параллельна внешней нормали поверхности и направлена в ту же сторону. Ось ox_2 параллельна стороне, противоположной вершине треугольника. Ось ox_1 , соответственно перпендикулярна этой стороне (см. рис 1):

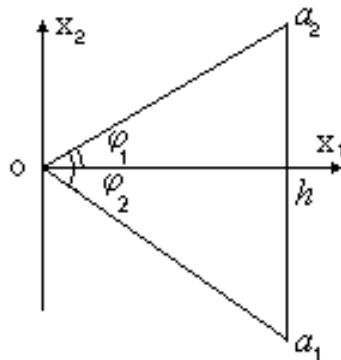


Рис. 1.

Координаты вершин элемента в локальной системе координат равны $(0,0)$, (h_n, k_{n1}, h_n) , (h_n, k_{n2}, h_n) , где $kn_1 = tg\varphi_{n1}$, $kn_2 = tg\varphi_{n2}$, $\varphi_{n1}, \varphi_{n2}$ - углы, которые образуют стороны элемента с осью ox_1 . Такой выбор системы координат обеспечивает определенную симметрию

интегрируемых выражений. Координаты точки наблюдения ξ_m элемента m в локальной системе координат элемента n обозначим $(\zeta_{nm1}, \zeta_{nm2}, \zeta_{nm3})$. Вычисляемые интегралы примут вид

$$U_{nm} = \int_{\Gamma_n} \frac{1}{\sqrt{\zeta_{nm3}^2 + (x_1 - \zeta_{nm1})^2 + (x_2 - \zeta_{nm2})^2}} d\Gamma,$$

$$Q_{nm} = \int_{\Gamma_n} \frac{\zeta_{nm3}}{[\zeta_{nm3}^2 + (x_1 - \zeta_{nm1})^2 + (x_2 - \zeta_{nm2})^2]^{3/2}} d\Gamma.$$

В результате перехода к повторным получим

$$U_{nm} = \int_0^{h_n} \int_{k_{n1}x_1}^{k_{n2}x_1} \frac{1}{\sqrt{\zeta_{nm3}^2 + (x_1 - \zeta_{nm1})^2 + (x_2 - \zeta_{nm2})^2}} dx_2 dx_1, \quad (10)$$

$$Q_{nm} = \int_0^{h_n} \int_{k_{n1}x_1}^{k_{n2}x_1} \frac{\zeta_{nm3}}{[\zeta_{nm3}^2 + (x_1 - \zeta_{nm1})^2 + (x_2 - \zeta_{nm2})^2]^{3/2}} dx_2 dx_1. \quad (11)$$

Внутренние интегралы легко вычисляются аналитически. Внешние интегралы (10, 11) после ряда замен приводятся к дробно-рациональным выражениям и интегрируются в элементарных функциях. Интеграл для функции U_{nm} представляет комбинацию функций \arctan и \ln с аргументами, определяющими положение точки наблюдения относительно вершин элемента. Для функции Q_{nm} - комбинацию восьми функций \arctan с такими же аргументами.

Рассматриваются следующие взаимные положения точки и элемента:

1. Точка ξ_m лежит вне плоскости элемента n . Тогда подынтегральные функции непрерывны и интегралы (10, 11) непрерывные функции параметров – координат точки ξ_m .

2. Точка ξ_m лежит на плоскости элемента n , внутри или вне его. Пределы первообразных внешних интегралов соответственно равны

$$F_1(\xi_1, \xi_2, 0, z, k) = -\frac{2c \ln \left| \sqrt{z^2 + c^2} - z \right|}{(\sqrt{1+k^2} - k)\sqrt{1+k^2}} + \frac{ck \ln \left[c^2 + \frac{2(c - (k + \sqrt{1+k^2})z)(z - \sqrt{z^2 + c^2})}{\sqrt{1+k^2}} \right] + z \ln \left[\frac{c - kz}{\sqrt{1+k^2}} + \sqrt{z^2 + c^2} \right] - z}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$F_2(\xi_1, \xi_2, 0, z, k) = \frac{\pi}{2} \left\{ \text{sign} \left[c(k + \sqrt{1+k^2}) + z - \sqrt{c^2 + z^2} \right] + \text{sign} \left[c(\sqrt{1+k^2} - k) - z + \sqrt{c^2 + z^2} \right] \right\},$$

где $c = \frac{\zeta_2 - k\zeta_1}{\sqrt{1+k^2}}$, $z = \sqrt{1+k^2}x - \frac{k\zeta_2 + \zeta_1}{\sqrt{1+k^2}}$.

Функции U_{nm} и Q_{nm} строятся на основе первообразных $F_1(\xi_1, \xi_2, 0, z, k)$, $F_2(\xi_1, \xi_2, 0, z, k)$ по теореме Ньютона-Лейбница с подстановками $k = k_1$ и $k = k_2$, $x_1 = h$ и $x_1 = 0$.

На следующих рисунках приведены зависимости функций U_{nm} и Q_{nm} от координат особой точки u_1, u_2 на плоскости элемента с параметрами $k_1 = -1, k_2 = 1, h = 1$.

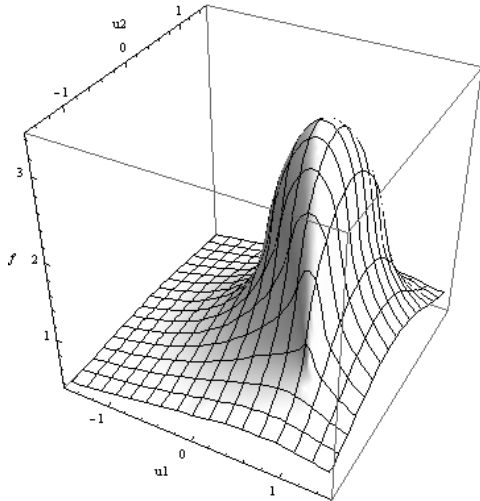


Рис. 2.

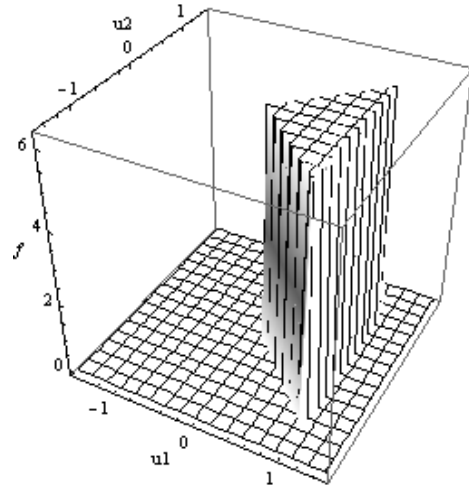


Рис. 3.

3. Точка лежит на границе элемента. Функции Q_{nm}^* имеют разрыв, равный 2π , а функции U_{nm}^* - устранимые разрывы [7].

Таким образом, в результате построены аналитические выражения для интегралов (10, 11), позволяющие вычислять их для любого треугольного граничного элемента, независимо от его положения относительно особой точки, в том числе для сингулярных случаев, когда особая точка лежит на плоскости элемента. Это позволяет повысить точность и скорость решения задачи.

Пример.

Работа алгоритма проиллюстрирована решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кубе

$$\Delta u = 0$$

и задачи со смешанными краевыми условиями для того же уравнения.

Длина ребра куба равна 1, центр куба совпадает с началом координат. Грани куба параллельны координатным плоскостям.

На гранях заданы следующие граничные условия:

$$x_1 = -0.5, -0.5 \leq x_2 \leq 0.5, -0.5 \leq x_3 \leq 0.5 \quad u = 2,$$

$$x_1 = 0.5, -0.5 \leq x_2 \leq 0.5, -0.5 \leq x_3 \leq 0.5 \quad u = 2,$$

$$x_2 = \pm 0.5, -0.5 \leq x_1 \leq 0.5, -0.5 \leq x_3 \leq 0.5 \quad u = 0,$$

$$x_3 = \pm 0.5, -0.5 \leq x_1 \leq 0.5, -0.5 \leq x_2 \leq 0.5 \quad u = 0.$$

Каждая грань куба разрезана на 4 граничных элемента диагоналями. Всего 24 элемента. Полученное численное решение сравнивалось с аналитическим, построенным в виде ряда

$$u = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m} \cos \pi(2k-1)x_2 \cos \pi(2m-1)x_3}{(2k-1)(2m-1)} (3 \operatorname{ch}(c_{mk}x_1) - \operatorname{sh}(c_{mk}x_1)), \quad (12)$$

где $c_{mk} = \pi \sqrt{(2k-1)^2 + (2m-1)^2}$.

На рис. 4 показано сравнение численно-аналитического решения с аналитическим решением (12) на прямой $(-0.5,0,0)-(0.5,0,0)$. Сплошной линией выделено численно-аналитическое решение, пунктиром – аналитическое. На рис. 5 показана погрешность численного решения вдоль той же прямой.

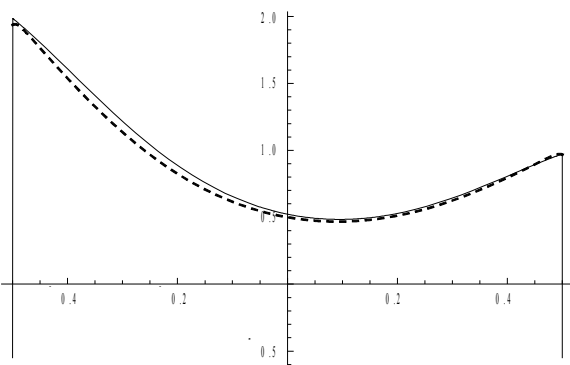


Рис. 4.

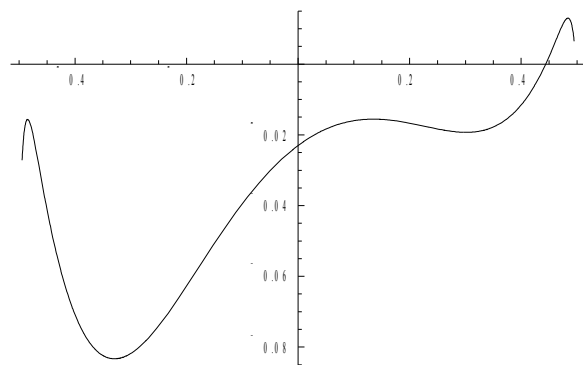


Рис. 5.

Было также построено решение методом граничных элементов с численным интегрированием по элементам. Сравнительные результаты представлены в приведенной ниже таблице.

Таблица 1.

Сравнение решений, полученных различными методами

x	Аналитическое решение	Численно-аналитическое решение	Решение по методу граничных элементов
-0.375	1.43016	1.50863	1.34032
-0.250	0.96719	1.0412	0.801924
-0.125	0.65859	0.703483	0.484194
0.0	0.5	0.523011	0.337388
0.125	0.4721	0.487691	0.327176
0.250	0.56012	0.578455	0.440945
0.375	0.74827	0.763672	0.684603

Из приведенной таблицы и графиков видно, что погрешность численно-аналитического решения не превышает 10%.

Погрешность численного решения существенно больше. Время счета численного решения примерно в 3 раза больше, чем численно-аналитического.

В случае смешанной задачи на гранях заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.5, -0.5 \leq x_2 \leq 0.5, -0.5 \leq x_3 \leq 0.5 \quad q = 1, \\ x_1 &= 0.5, -0.5 \leq x_2 \leq 0.5, -0.5 \leq x_3 \leq 0.5 \quad q = -1, \\ x_2 &= \pm 0.5, -0.5 \leq x_1 \leq 0.5, -0.5 \leq x_3 \leq 0.5 \quad u = 0, \\ x_3 &= \pm 0.5, -0.5 \leq x_1 \leq 0.5, -0.5 \leq x_2 \leq 0.5 \quad u = 0. \end{aligned}$$

Аналитическое решение в этом случае имеет вид

$$u = \frac{-4}{\pi^2} \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m} \cos \pi(2k-1)x_2 \cos \pi(2m-1)x_3}{(2k-1)(2m-1)} c_{mk} \frac{\text{sh}(c_{mk} x_1)}{\text{sh}(c_{mk} / 2)}. \quad (13)$$

На рис. 6 показано сравнение численно-аналитического решения с аналитическим решением (13) на прямой $(-0.5, 0, 0) - (0.5, 0, 0)$. Сплошной линией выделено численно-аналитическое решение, пунктиром – аналитическое.

На рис. 7 показана погрешность численного решения вдоль той же прямой.

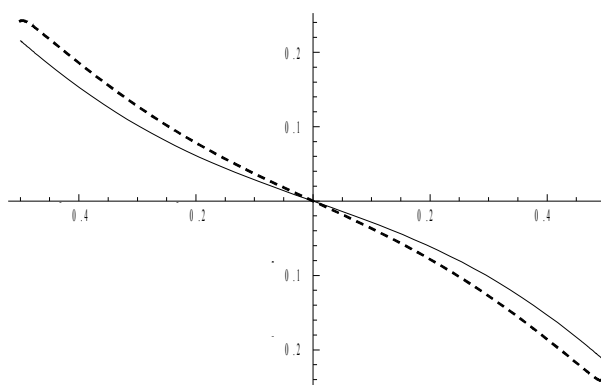


Рис. 6.

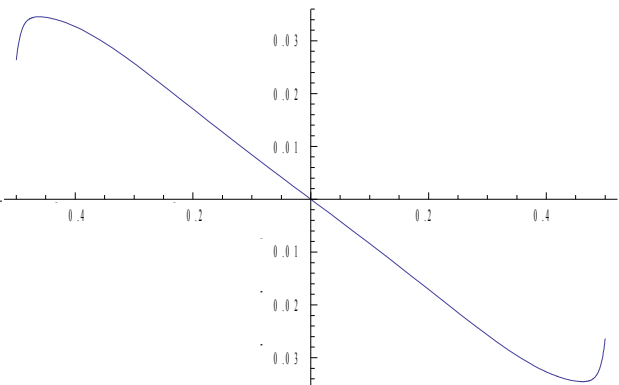


Рис. 7.

Итак, в работе получены аналитические выражения для интегралов по треугольным граничным элементам. Эти выражения позволяют вычислять граничные интегралы, в том числе сингулярные, при произвольной ориентации элемента и форме. Приведенный пример показывает, что такой подход позволяет увеличить скорость и точность решения задачи.

Литература

1. Хомяков А.,Н. Метод граничных элементов повышенной точности в задачах гидродинамики идеальной жидкости.// Вычислительные методы и программирование. 2008. Т. 9, С. 401-404.
2. Бреббия К., Телес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М. Мир, 1987.- 524 с.
3. Зарубин В.,С., Кувыркин Г.Н. О возможностях метода граничных элементов при моделировании континуальных систем //http://technomag.edu.ru/doc/48397.html
4. Федотов В.П., Нефедова О.А. Применение модифицированного метода граничных элементов для решения параболических задач.// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. сер. Физ.-мат. науки. 2011. Вып. 4(25), с. 93-101.
5. Федотов В. П., Спевак Л.Ф. Аналитическое интегрирование функций влияния для решения задач упругости и теории потенциала методом граничных элементов// Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 2. С. 87-104.
6. Федотов В.П., Горшков А.В. Численно-аналитический метод решения задач упругости с особенностями//Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия "Физ.-мат. науки". 2005. Т. 38, с. 29-34.
7. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. ГИФМЛ, 1959. 232 с.